Vector Analysis

26 August 2008, 14–17 hrs

This final exam consists of the following **four** exercises. You get 10 points for free.

Exercise 1 (25 pt.)
The surface $S \subset \mathbb{R}^3$ is given by the equation $f(x, y, z) = 0$, where

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Here a, b and c are positive real numbers.

1. Show that the tangent plane at a point $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$ is given by the equation $g(x, y, z) = 0$, with

$$g(x,y,z) = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1. \tag{1}$$

2. Determine the extreme values of g on S.

3. Use the result of part 2 to show that the surface S lies below its tangent plane at p if $z_0 > 0$.

Exercise 2 (20 pt.)
Let $z = f(u, v)$, where f is a C^2-function. Via the substitution $u = x^2 + y^2$ and $v = x + y$ we can also consider z as a function of x and y.

1. Show that

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2(x-y)}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

2. Express

$$(2u - v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}$$

in terms of x, y and the partial derivatives of z with respect to x and y.

Exercise 3 (25 pt.)
The *catenary* is the curve in the xy-plane given by the equation

$$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

The curve C is the part of the catenary between the lines $x = -1$ and $x = 1$. The surface S is obtained by revolving C around the x-axis.

1. Give a parametrization of S, and show that S is a regular surface.
2. Determine the set of points of S at which the normal is perpendicular to the x-axis.
3. Compute the area of S.

Exercise 4 (20 pt.)
The circle C in $\mathbb{R}^3$ is is the intersection of the sphere with equation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and the plane with equation $x + y + z = 0$. Show that

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pm\sqrt{3}\pi a^2,$$

where the sign depends on the orientation of C. Explain which orientation corresponds to the positive value of this integral.

Uitwerking

Opgave 1.
1. De vergelijking van het raakvlak in p aan S is $\nabla f(p) \cdot (\mathbf{x} - p)$, met $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0)$. Uitwerken geeft de vergelijking

$$\frac{2x_o}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_o}{b^2}(y - y_0) + \frac{2c_o}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Gebruik $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ om hieruit de gevraagde vergelijking af te leiden.
2. Als $\mathbf{x} = (x, y, z) \in S$ een kritiek punt is van g op S, dan is er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat

$$\begin{aligned} \nabla g(\mathbf{x}) &= \lambda \nabla f(\mathbf{x}) \\ f(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Uitschrijven geeft

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{a^2} &= 2\lambda \frac{x}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} &= 2\lambda \frac{y}{b^2} \\ \frac{z_0}{c^2} &= 2\lambda \frac{z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Aangezien $(0, 0, 0) \notin S$, geldt $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, en dus $\lambda \neq 0$. Dus volgt

$$x = \frac{x_0}{2\lambda}, y = \frac{y_0}{2\lambda}, z = \frac{z_0}{2\lambda}.$$

Invullen in (2) geeft

$$\frac{1}{4\lambda^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 1,$$

dus $\frac{1}{4\lambda^2} = 1$. Hieruit volgt: $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. De kritieke punten zijn dus $p = (x_0, y_0, z_0)$ en $q = (-x_0, -y_0, -z_0)$. We zullen zo aantonen dat S gesloten en begrensd is, en dus compact. Dus g neemt op S zijn maximum en zijn minimum aan. Aangezien $g(p) = 0$ en $g(q) = -2$, volgt dat g op S een absoluut maximum heeft in p en een absoluut minimum in q.

Rest nog aan te tonen dat S compact is. Welnu, S is *gesloten* omdat $S = f^{-1}(0)$ en omdat f continu is.

Verder geldt voor $(x, y, z) \in S$ dat

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq \frac{1}{\max(a^2, b^2, c^2)}(x^2 + y^2 + z^2),$$

dus $x^2 + y^2 + z^2 \leq \max(a^2, b^2, c^2)$. M.a.w., S ligt binnen de bol met middelpunt $(0, 0, 0)$ en straal $\min(a, b, c)$, en is dus *begrensd.*

3. Voor $z_0 > 0$ geldt dat de z-component van $\nabla f(p)$, nl. $\frac{2z_0}{c^2}$, positief is. Daarom geldt $g(x, y, z) < 0$ dan en slechts dan als (x, y, z) *onder* het raakvlak in p aan S ligt. Voor $g(x, y, z) \in S \setminus \{p\}$ geldt: $g(x, y, z) < g(p) = 0$, dus S ligt onder het raakvlak in p aan S.

Opgave 2.

1. Met de kettingregel leiden we af:

$$\begin{aligned} z_x &= 2xz_u + z_v \\ z_y &= 2yz_u + z_v. \end{aligned}$$

Oplossen van dit lineaire stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden z_u en z_v geeft

$$z_u = \frac{1}{2(x-y)}(z_x - z_y). \tag{3}$$

2. Ook z_u is een functie van x en y. Er geldt dus:

$$\begin{aligned} z_{uu} = (z_u)_u &= \frac{1}{2(x-y)}((z_u)_x - (z_u)_y) \\ &= \frac{1}{2(x-y)}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})(\frac{1}{2(x-y)}(z_x - z_y)) \\ &= \frac{1}{2(x-y)^3}(z_y - z_x) + \frac{1}{4(x-y)^2}(z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy}). \end{aligned}$$

Eenvoudig is af te leiden dat $2u - v^2 = (x-y)^2$. Samen met (3) levert dit

$$(2u - v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Opgave 3.

1. Een parametervoorstelling van dit omwentelingsoppervlak is

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v),$$

waarbij $f(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$, en $(u, v) \in D = \{(u, v) \mid -1 \leq u \leq 1, 0 \leq v < 2\pi\}$. Eenvoudig is na te gaan dat

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = f(u)\,(f'(u)\mathbf{i} - \cos v\,\mathbf{j} - \sin v\,\mathbf{k}).$$

Dus: $|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v| = |f(u)|\,\sqrt{f'(u)^2 + 1} \neq 0$ voor $(u, v) \in D$. (Merk op dat $f(u) > 0$ voor alle $u \in \mathbb{R}$.) Dus S is regulier.

2. $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$ staat loodrecht op de x-as dan en slechts dan als de component in de $\mathbf{i}$-richting nul is. Omdat $f(u) > 0$ voor $(u, v) \in D$, geldt dit dus precies voor

alle $(u, v) \in D$ waarvoor $f'(u) = 0$. Omdat $f'(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$, is dit het geval precies dan als $u = 0$. De gevraagde verzameling is dus

$$\{(0, \cos v, \sin v) \mid 0 \leq v < 2\pi\},$$

de cirkel in het yz-vlak met middelpunt $(0, 0, 0)$ en straal 1.
3. Er geldt:

$$\begin{aligned}
\text{opp}(S) &= \iint_D |\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v| \, dudv \\
&= 2\pi \int_{u=-1}^{2} |f(u)| \sqrt{f'(u)^2 + 1} du \\
&= \tfrac{1}{2}\pi \int_{u=-1}^{2} (e^u + e^{-u})^2 du \\
&= \tfrac{1}{2}\pi(e^2 - e^{-2} + 4).
\end{aligned}$$

We gebruiken hier

$$1 + f'(u)^2 = 1 + \tfrac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = \tfrac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) = \tfrac{1}{4}(e^u + e^{-u})^2.$$

Opgave 4. Laat $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, dan is de gevraagde integraal gelijk aan $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Merk op dat C de rand is van een schijf S in het vlak $x + y + z = 0$, met middelpunt $(0, 0, 0)$ en straal a. De eenheidsnormaal op S is de eenheidsnormaal van dit vlak, dus

$$\mathbf{n} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Volgens Stokes geldt:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_S -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \mp\sqrt{3} \iint_S dS \\
&= \mp\sqrt{3}\,\text{opp}(S) \\
&= \mp\sqrt{3}\pi a^2.
\end{aligned}$$

Het plusteken correspondeert met $\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. De hierbij passende oriëntatie van C is, van bovenaf gezien, met de wijzers van de klok mee.